Devoir Maison 1

Exercice 1

(*D'après Maths C, Banque PT 2020*)

Préambule

1. Soit n un entier naturel non nul, I un intervalle de $\mathbb{R}$, non vide, non réduit à un point, et a un point de I. Énoncer le théorème donnant la formule de Taylor-Young, pour une fonction f de classe $\mathcal{C}^n$ sur I, au voisinage de a.
2. Rappeler le développement limité à l'ordre deux, au voisinage de zéro, de la fonction cosinus, en faisant le lien avec la formule de Taylor-Young.

Partie I

On considère la fonction ϕ qui, à tout réel x, associe :

$$\phi(x) = \frac{12 - 5x^2}{12 + x^2} \; ; \qquad \psi(x) = 1 - \frac{6x^2}{12 + x^2}$$

1. Étudier la parité de la fonction ϕ. Que peut-on en déduire pour le domaine d'étude, et pour sa courbe représentative ?
2. Comparer, pour tout réel x, $\phi(x)$ et $\psi(x)$.
3. Calculer, pour tout réel x : $\phi'(x)$ (On utilisera les résultats des questions précédentes pour faire le calcul le plus simplement possible).
4. Donner le tableau de variations de la fonction ϕ sur $\mathbb{R}$ (on fera figurer les limites de ϕ aux bornes du domaine d'étude).
5. Donner les développements limités à l'ordre 4 en 0 de la fonction ϕ. Que constate-t-on ?
6. On donne les valeurs approchées :

$$\phi(\pi) \approx -1,71 \text{ et } 2\sqrt{\frac{3}{5}} \approx 1,54.$$

   Tracer, sur un même graphique, sur la feuille de papier millimétré fournie, avec l'échelle : 3 cm pour une unité, la courbe représentative de la fonction ϕ sur $[-\pi, \pi]$, et la courbe représentative de la fonction cosinus sur $[\pi, \pi]$. Que remarque-t-on ?

Partie II

Dans cette partie, on cherche à déterminer les fonctions h, continues en 0, prenant la valeur 1 en zéro, telles que, pour tout réel x :

$$h(2x) = h(x)\cos(\pi x)$$

1. Pour tout réel a, exprimer $\sin(2a)$ en fonction de $\cos a$ et $\sin a$.
2. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel non nul n, et pour tout réel x :

$$\sin(\pi x) = 2^n \sin\left(\frac{\pi x}{2^n}\right) \prod_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{\pi x}{2^k}\right).$$

3. Montrer que, pour toute solution h, tout entier naturel non nul n, et pour tout réel x :

$$h(x) = h\left(\frac{x}{2^n}\right) \cos\left(\frac{\pi x}{2^n}\right) \cdots \cos\left(\frac{\pi x}{2^2}\right) \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right).$$

4. Montrer que, pour tout entier naturel non nul n, et pour tout réel x :

$$h(x)\sin\left(\frac{\pi x}{2^n}\right) = \frac{1}{2^n} h\left(\frac{x}{2^n}\right)\sin(\pi x).$$

5. Pour tout réel x non nul, déterminer la valeur de

$$\lim_{n\to+\infty} h\left(\frac{x}{2^n}\right).$$

6. Pour tout réel x non nul, déterminer la valeur de

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2^n} \frac{x}{\sin\left(\frac{\pi x}{2^n}\right)}.$$

7. Déduire des résultats précédents l'expression, pour tout réel x, de $h(x)$ en fonction de x.

Corrigé

Corrigé de l'exercice 1

Préambule

1. Théorème de Taylor-Young : Soit n est un entier naturel non nul, f une fonction de classe C^n sur I, intervalle de $\mathbb{R}$ non vide et non réduit à un point, si $a \in I$, alors :

$$\boxed{f(x) \underset{x\to a}{=} f(a) + (x-a)f'(a) + ... + \frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(a) + o\left((x-a)^n\right) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!}f^{(k)}(a) + o_a\left((x-a)^n\right)}$$

2. La fonction cosinus qui est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $I = \mathbb{R}$, on peut lui appliquer la formule de Taylor-Young au rang 2 au voisinage de $a = 0$, alors

$$\boxed{cos(x) \underset{x\to 0}{=} \cos(0) + (-\sin(0))x + \frac{(-\cos(0)}{2}x^2 + o(x^2) \underset{x\to 0}{=} 1 - \frac{x^2}{2} + o\left(x^2\right)}$$

Partie I

1. On a clairement, pour $x \in \mathbb{R}$,$\phi(-x) = \phi(x)$, donc $\boxed{\text{la fonction } \phi \text{ est paire.}}$

   Ainsi $\boxed{\text{il suffira d'étudier la fonction } \phi \text{ sur } [0, +\infty[}$, et dans un repère orthonormé,

   $\boxed{\text{sa courbe représentative sera symétrique par rapport à l'axe des ordonnées}}$.

2. Soit $x \in \mathbb{R}$, on a

$$1 - \frac{6x^2}{12+x^2} = \frac{12+x^2-6x^2}{12+x^2} = \frac{12-5x^2}{12+x^2}$$

   C'est-à-dire

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \phi(x) = \psi(x)}$$

3. Soit $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\phi'(x) = \psi'(x) = -\frac{12x(12+x^2) - 6x^2(2x)}{(12+x^2)^2} = \frac{-144x}{(12+x^2)^2}$$

   Ainsi

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \phi'(x) = \frac{-144x}{(12+x^2)^2}}$$

4. Pour $x \geqslant 0$, on a $\phi'(x) \leqslant 0$. ϕ est donc décroissante sur $[0, +\infty[$.

   De plus ϕ est paire, ϕ est donc croissante sur $]-\infty, 0]$.

   Au voisinage de $+\infty$ on a $\phi(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{-5x^2}{x^2} \underset{x\to+\infty}{\sim} -5$, ainsi $\lim\limits_{x\to+\infty} \phi(x) = -5$ et donc, par parité, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -5$.

   On a donc le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$\phi'(x)$		$+$	0	$-$	
$\phi(x)$	-5	$\nearrow$	1	$\searrow$	-5

5. Au voisinage de 0, on a

$$\begin{aligned}
\varphi(x) &= 1 - \frac{6x^2}{12+x^2} \\
&= 1 - \frac{x^2}{2}\frac{1}{1+\frac{x^2}{12}} \\
&\underset{x\to 0}{=} 1 - \frac{x^2}{2}\left(1 - \frac{x^2}{12} + o(x^2)\right) \\
&\underset{x\to 0}{=} 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)
\end{aligned}$$

On constate que le développement limité de φ en 0 à l'ordre 4 est exactement le même que celui de la fonction cosinus.

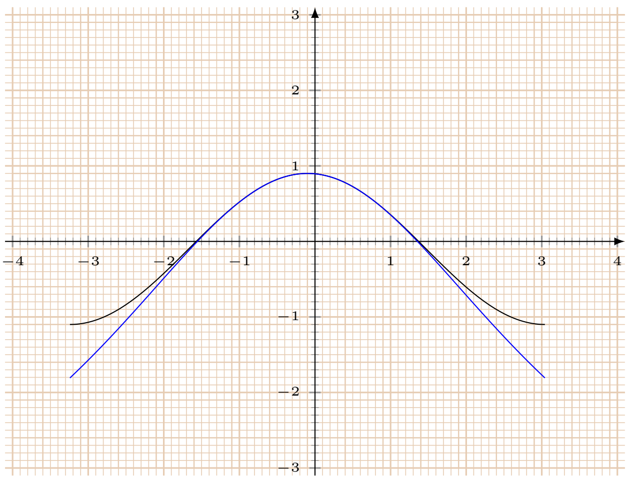
6. Remarquons que les deux valeurs approchées données sont là pour nous aider dans notre tracé. L'utilité de la valeur approchée de $\phi(\pi)$ est évidente, détaillons à quoi nous sert la valeur approchée de $2\sqrt{\frac{3}{5}}$

Il est naturel, pour effectuer le tracé, de se demander quelles valeurs annulent la fonction ϕ. Or

$$\begin{aligned}
\phi(x) = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad 12 - 5x^2 = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad x^2 = \frac{12}{5} \\
&\Leftrightarrow \quad x = 2\sqrt{\frac{3}{5}} \text{ ou } x = -2\sqrt{\frac{3}{5}}
\end{aligned}$$

On obtient donc la figure suivante :

Figure .1 – Tracé de cos (en noir) et ϕ (en bleu)



Partie II

1. C'est une question de cours :

$$\boxed{\forall a \in \mathbb{R}, \qquad \sin(2a) = 2\cos(a)\sin(a)}$$

2. Notons $\mathcal{P}_n$ la propriété

$$\mathcal{P}_n : \qquad \text{« } \forall x \in \mathbb{R}, \sin(\pi x) = 2^n \sin\left(\frac{\pi x}{2^n}\right)\prod_{k=1}^{n}\cos\left(\frac{\pi x}{2^k}\right) \text{ »}$$

Montrons par récurrence que $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout entier naturel n non nul.

Initialisation :

D'après la formule de duplication rappelée à la question 1., pour tout réel x on a $\sin(\pi x) = 2sin(\frac{\pi x}{2})cos(\frac{\pi x}{2})$

La propriété $\mathcal{P}_1$ est bien vérifiée.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}^*$, Supposons que la propriété $\mathcal{P}_n$ vraie

Soit $x \in \mathbb{R}$. On a alors :

$$\begin{aligned}
\sin(\pi x) &= 2^n \sin\left(\frac{\pi x}{2^n}\right) \prod_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{\pi x}{2^k}\right) && \textit{d'après l'hypothèse de récurrence} \\
&= 2^n 2 \sin\left(\frac{\pi x}{2^{n+1}}\right) \cos\left(\frac{\pi x}{2^{n+1}}\right) \prod_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{\pi x}{2^k}\right) && \textit{d'après la formule de duplication} \\
&= 2^{n+1} \sin\left(\frac{\pi x}{2^{n+1}}\right) \prod_{k=1}^{n+1} \cos\left(\frac{\pi x}{2^k}\right)
\end{aligned}$$

Ceci prouve la propriété au rang $n+1$ et achève la récurrence.

Finalement

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \qquad \sin(\pi x) = 2^n \sin\left(\frac{\pi x}{2^n}\right) \prod_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{\pi x}{2^k}\right)}$$

3. Soit h une solution du problème, h est une fonction définie sur $\mathbb{R}$, continue en 0, telle que $h(0) = 1$, et telle que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $h(2x) = h(x)\cos(\pi x)$.

   On va là encore procéder par récurrence. Notons $\mathcal{Q}_n$ la propriété

$$\mathcal{Q}_n : \qquad \text{« } \forall x \in \mathbb{R}, h(x) = h\left(\frac{x}{2^n}\right) \prod_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{\pi x}{2^k}\right) \text{ »}$$

   Initialisation : Soit $x \in \mathbb{R}$, en appliquant la relation vérifiée par h à $\frac{x}{2}$ on obtient $h(x) = h(\frac{x}{2})\cos(\frac{\pi x}{2})$.

   La propriété $\mathcal{Q}_1$ est donc vérifiée.

   Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on suppose $\mathcal{Q}_n$ vraie.

   Soit $x \in \mathbb{R}$, on a alors :

$$\begin{aligned}
h(x) &= h\left(\frac{x}{2^n}\right) \prod_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{\pi x}{2^k}\right) && \textit{d'après l'hypothèse de récurrence} \\
&= h\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right) \cos\left(\frac{\pi x}{2^{n+1}}\right) \prod_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{\pi x}{2^k}\right) && \textit{d'après l'hypothèse sur } h \textit{ appliquée à } \frac{x}{2^n} \\
&= h\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right) \prod_{k=1}^{n+1} \cos\left(\frac{\pi x}{2^k}\right)
\end{aligned}$$

   Ceci prouve la propriété au rang $n+1$ et achève la récurrence.

   Finalement

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \forall x \in \mathbb{R}, \qquad h(x) = h\left(\frac{x}{2^n}\right) \prod_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{\pi x}{2^k}\right)}$$

4. Soit $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$, d'après la question 3., on a

$$h(x)\sin\left(\frac{\pi x}{2^n}\right) = h\left(\frac{x}{2^n}\right)\sin\left(\frac{\pi x}{2^n}\right) \prod_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{\pi x}{2^k}\right)$$

En utilisant à présent la question 2., on en déduit que

$$\boxed{h(x)\sin\left(\frac{\pi x}{2^n}\right)=\frac{1}{2^n}h\left(\frac{x}{2^n}\right)\sin(\pi x)}$$

5. La fonction h est continue en 0 et $h(0)=1$, on a donc $\lim\limits_{u\to 0} h(u)=1$.

   Si x est un réel fixé non nul, $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{x}{2^n}=0$, donc, par composition de limites, on a $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} h\left(\frac{x}{2^n}\right)=1}$.

6. Soit $x\in\mathbb{R}^*$.
   On sait que $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\pi x}{2^n}=0$, ainsi, à partir d'un certain rang : $\frac{\pi x}{2^n}\in\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$ et donc, pour $n\in\mathbb{N}$ suffisamment grand on a bien $\sin\left(\frac{\pi x}{2^n}\right)$ non nul.

   Pour n assez grand on a

$$\frac{1}{2^n}\frac{x}{\sin\left(\frac{\pi x}{2^n}\right)}=\frac{1}{\pi}\frac{\left(\frac{\pi x}{2^n}\right)}{\sin\left(\frac{\pi x}{2^n}\right)}$$

   Puisque $\lim\limits_{u\to 0}\frac{\sin(u)}{u}=1$, on peut donc affirmer que

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{2^n}\frac{x}{\sin\left(\frac{\pi x}{2^n}\right)}=\frac{1}{\pi}}$$

7. Soit $x\in\mathbb{R}^*$ et n un entier suffisamment grand pour que $\sin\left(\frac{\pi x}{2^n}\right)\neq 0$.

   D'après la question 4., on a

$$h(x)=\frac{1}{2^n}\frac{x}{\sin\left(\frac{\pi x}{2^n}\right)}h\left(\frac{x}{2^n}\right)\frac{\sin(\pi x)}{x}$$

   On passe alors à la limite dans le terme de droite lorsque n tend vers l'infini (à gauche $h(x)$ est une constante), et en exploitant les résultats des questions 5. et 6., on obtient $h(x)=\frac{\sin(\pi x)}{x}$.
   Finalement il ne reste plus qu'à utiliser l'hypothèse $h(0)=1$ pour conclure

$$\boxed{\forall x\in\mathbb{R},\qquad h(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin(\pi x)}{\pi x} & \text{si } x\neq 0\\ 1 & \text{si } x=0\end{cases}}$$

Remarque

Ce n'était pas demandé (et donc pas attendu le jour du concours) mais on peut être tenté de vérifier que réciproquement, la fonction h définie par $h(x)=\frac{sin(\pi x)}{\pi x}$ si $x\neq 0$ et $h(0)=1$ est bien une solution du problème posé. Ceci est vrai car cette fonction est bien continue en 0 grâce à la limite classique rappelée précédemment, et pour tout réel x, $\frac{\sin(2\pi x)}{2\pi x}=\frac{\sin(\pi x)}{\pi x}\cos(\pi x)$, donc $h(2x)=h(x)\cos(\pi x)$ si x est non nul, et si $x=0$ cette égalité est vraie aussi car $1=1\times\cos(0)$.